Projet de recherche

Julien Paupert

1 Cadre et motivations: sous-groupes discrets et réseaux de $PU(2,1)$

Mon travail de recherche se situe dans le cadre encore assez peu exploré des groupes discrets d'isométries de l'espace hyperbolique complexe $H^n_{\mathbb{C}}$, et en particulier des réseaux de $PU(n,1)$. Cet espace est l'une des deux occurrences (avec l'espace hyperbolique réel) d'un espace symétrique de rang 1 dans lequel la super-rigidité de Margulis ne s'applique pas. Mais, contrairement au cas réel, très peu de choses sont connues sur ces sous-groupes discrets, à commencer par des exemples intéressants. Rappelons que l'on connaît dans le cas réel des groupes de réflexions (voir les constructions de Vinberg, Makarov en petites dimensions), et que l'on dispose également par la construction de Gromov–Piatetski-Shapiro d'exemples de réseaux non-arithmétiques en toute dimension.

Dans le cas de $PU(n,1)$, ces questions sont largement ouvertes, même dans les plus petites dimensions. Ceci est dû en grande partie au fait qu'il n'y a pas en géométrie hyperbolique complexe d'hypersurface (réelle) totalement géodésique, et en particulier pas de notion naturelle de polyèdre ou de groupe de réflexions analogue au cas hyperbolique réel (ou euclidien). Cette situation rend ardues non seulement les constructions de sous-groupes discrets dans $PU(n,1)$, mais aussi celles de domaines fondamentaux pour l'action d'un tel groupe. Les substituts possibles dont on dispose dans $H^n_{\mathbb{C}}$ sont les *réflexions complexes* (ou $\mathbb{C}$-réflexions), isométries holomorphes fixant une hypersurface complexe totalement géodésique (une copie de $H^{n-1}_{\mathbb{C}} \subset H^n_{\mathbb{C}}$) et les *réflexions réelles* (ou $\mathbb{R}$-réflexions) qui sont des involutions antiholomorphes fixant un sous-espace lagrangien (une copie de $H^n_{\mathbb{R}} \subset H^n_{\mathbb{C}}$). La plupart des exemples connus à ce jour sont des sous-groupes engendrés par des réflexions complexes, ou bien des constructions arithmétiques. L'utilisation de $\mathbb{R}$-réflexions et des plans lagrangiens correspondants est très récente (elle a été introduite par Falbel et Zocca dans [FZ] en 1999) et est l'un des fils conducteurs de ma recherche.

2 Projets en cours

Mon but principal est d'obtenir de nouveaux sous-groupes discrets de $PU(2,1)$. Les problèmes qui se posent sont les suivants. D'abord, disposer d'une méthode pour produire des bons candidats: celle-ci est fournie par l'étude des configurations de la dernière partie de ma thèse. Ensuite, étant donné un groupe avec des générateurs explicites sous forme matricielle, il reste à déterminer s'il est (contenu dans) un réseau arithmétique. Si ce n'est pas le cas, la discrétude est un problème délicat à étudier. On dispose pour cela de méthodes pour voir si le groupe en question a vraiment de bonnes chances d'être discret, par exemple en étudiant de façon systématique les mots d'une longueur maximale fixée (à la Schwartz), ou bien en utilisant l'algorithme de Deraux qui utilise la méthode de Dirichlet. Si ces premiers tests sont concluants, on esaie de fabriquer un domaine fondamental, en utilisant entre autres les techniques développées dans la deuxième partie de ma thèse ([DFP]). Ceci nous fournira d'autres informations sur les sous-groupe, par exemple une présentation ainsi que le volume de l'orbifold quotient s'il est fini. Il reste alors à déterminer si le groupe en question est vraiment nouveau, c'est-à-dire s'il n'est pas commensurable à un réseau de la liste de Deligne-Mostow ou Thurston (voir [DM] et [Th]).

Concrètement, je cherche actuellement de nouveaux groupes dans des configurations de type Mostow, c'est-à-dire des groupes engendrés par une réflexion complexe R_1 d'ordre p et une permutation cyclique d'ordre 3 (notée J précédemment).

2.1 Groupes discrets engendrés par des réflexions complexes d'ordre supérieur

Cette partie est un travail commun avec John Parker ([ParPau]). Nous considérons les groupes triangulaires symétriques dans $PU(2,1)$ engendrés par trois réflexions complexes d'ordre p. Nous nous intéressons particulièrement aux groupes dans lesquels certains mots sont elliptiques, et donnons des conditions nécessaires de discrétude pour de tels groupes. La motivation principale est que ces groupes sont des candidats de réseaux non arithmétiques.

Dans [Mos1] Mostow a construit les premiers exemples de réseaux non arithmétiques dans $PU(2,1)$. Ces réseaux étaient engendrés par trois réflexions complexes R_1, R_2 et R_3 ayant la propriété qu'il existe une isométrie J d'ordre 3 telle que $R_{j+1} = JR_jR^{-1}$. Dans les exemples de Mostow les générateurs R_j ont pour ordre $p = 3$, 4 or 5. Plus tard Deligne et Mostow ont construit d'autres réseaux non arithmétiques comme groupes de monodromie de certaines fonctions hypergéométriques dans [DM] (ces réseaux étaient connus de Picard qui ne considéra pas leur nature arithmétique). Ces réseaux sont (commensurables à) des groupes engendrés par des réflexions complexes R_j pour d'autres valeurs de p; voir Mostow [Mos2] et Sauter [Sa]. Par la suite, aucun nouveau réseau non arithmétique n'a été construit.

Dans [Par], Parker a considéré le cas $p = 2$, c'est-à-dire des involutions complexes I_1, I_2 et I_3 avec une isométrie J d'ordre 3 telle que $I_{j+1} = JI_jJ^{-1}$. En particulier il a utilisé un théorème de Conway et Jones ([CJ]) pour classer tous les tels groupes où I_1I_2 and $I_1I_2I_3$ sont elliptiques d'ordre fini.

De faᶊn remarquable, trouver les groupes pour lesquels R_1R_2 et $R_1R_2R_3$ sont elliptiques d'ordre fini avec $p \geq 3$ demande de résoudre la même équation que pour $p = 2$. Dans cet article nous utilisons dans le cas général les solutions de cette équation trouvées dans [Par] en utilisant [CJ].

Nous décrivons l'espace des configurations de tous les groupes engendrés par une réflexion complexe R_1 d'ordre p et une isométrie elliptique régulière J d'ordre 3 dans $PU(2,1)$. Cet espace de configurations est paramétré par la classe de conjugaison du produit R_1J, que l'on représente géométriquement de deux manières. La première, suivant Goldman, Parker, est de considérer la trace de R_1J; ceci détermine la classe de conjugaison de R_1J lorsque celui-ci est loxodromique, mais il y a une indétermination d'ordre 3 s'il est elliptique ou parabolique. La deuxième manière, suivant Paupert, est d'utiliser les invariants géométriques de la classe de conjugaison, à savoir une paire d'angles pour les isométries elliptiques et une paire (angle, longueur) pour les isométries loxodromiques. Nous utlisons les deux espaces de paramètres dans cet article, où l'on se concentre sur le cas elliptique.

Notre premier résultat est l'analogue direct du théorème principal de [Par], et peut être énoncé comme suit:

Theorem 2.1 *Soit R_1 une réflexion complexe d'ordre p et J un elliptique régulier d'ordre 3 dans $PU(2,1)$. Supposons que R_1J et $R_1R_2 = R_1JR_1J^{-1}$ sont elliptiques. Si le groupe $\Gamma = \langle R_1, R_2, R_3\rangle$ est discret alors on est dans l'un des cas suivants:*

- Γ *est un réseau de Mostow.*
- Γ *est un sous-groupe distingué d'un groupe de Mostow.*
- Γ *est l'un des groupes sporadiques décrits ci-dessous.*

Les groupes sporadiques correspondent aux 18 solutions exceptionnelles venant de [CJ], qui ne dépendent pas de p (les groupes, eux, changent bien sûr avec p). Nous déterminons pour chaque $p \geq 3$ lesquels de ces points sont situés dans notre espace de configurations. On doit alors analyser chacun de ces groupes pour déterminer s'il est discret, si oui si c'est un réseau, et si oui s'il est arithmétique. Nous illustrons des manières d'aborder ces questions en montrant que certains groupes sont arithmétiques, et d'autres sont non discrets. Nous analysons en détail la situation pour $p = 3$, qui peut être résumée ainsi:

Theorem 2.2 *Il y a 16 groupes sporadiques pour $p = 3$, avec les propriétés suivantes:*

- *Quatre d'entre eux ont un point fixe dans $H^2_{\mathbb{C}}$.*
- *Un stabilise une droite complexe.*
- *Un est contenu dans un réseau arithmetique.*
- *Les dix autres ne sont dans aucun cas précédent.*

La question cruciale est alors de déterminer lesquels des dix groupes restants sont discrets. Nous donnons une réponse négative pour trois d'entre eux, en trouvant des mots elliptiques d'ordre infini dans ces groupes.

La figure 1 montre le cas où R_1 est d'ordre 3; le triangle extérieur est le polygone des configurations donné par la dernière partie de ma thèse. La courbe "en zig-zag" a en fait deux composantes qui correspondent aux deux familles évoquées ci-dessus; on a également marqué les 16 points sporadiques (deux des points cités dans le théorème ci-dessus sont à l'extérieur du triangle de configurations).

Notons que les seuls groupes discrets connus dans cette image sont les réseaux de Mostow de [Mos1], tous situés sur le petit segment horizontal (voir dernière partie de ma thèse).

Le miracle (ou le coup de chance) de cette approche est que les solutions en termes d'angles (données par le théorème de Conway et Jones) sont les mêmes pour toutes les valeurs de p; il n'y a que le polygone de configurations associé qui change (et il y a alors plus ou moins de solutions possibles). La figure 2 illustre ce phénomène pour $p = 2, 3, ...10$.

2.2 Domaines fondamentaux pour les groupe sporadiques de réflexions complexes

Il reste à compléter le projet esquissé ci-dessus. L'étape suivante consiste à trouver lesquels de tous ces groupes sporadiques sont discrets, et si oui lesquels sont des réseaux. Notons qu'il y a une infinité de groupes à étudier (certains points sporadiques sont dans l'espace des configurations pour tout p).

La manière la plus raisonnable d'aborder ces questions est de construire des domaines fondamentaux pour l'action de ces groupes sur $H^2_{\mathbb{C}}$, dans le cadre du théorème du polyèdre de Poincaré. Ceci demande du travail (au moins quelques mois), mais répondra aux deux questions à la fois. Cela nous donnera aussi des informations sur les groupes contenus dans des réseaux arithmetiques (ont-ils indice fini? si oui, quel est l'indice?). On peut espérer utiliser une variante de la construction de [DFP], les générateurs étant de la même forme. Nous avons déjà analysé les classes de conjugaison de certains mots cruciaux du groupe (comme les produits R_1R_2, les mots de tresse $R_1R_2R_1R_2^{-1}R_1^{-1}R_2^{-1}$, et les "mots de Mostow" R_2R_1J et $J^{-1}R_1R_2$). Dans les trois cas mentionnés ci-dessus on obtient des mots elliptiques d'ordre infini (et donc la non-discrétude du groupe), mais dans les cas restants les tests préliminaires de discrétude sont concluants.

Figure 1: Groupes discrets dans le triangle des configurations pour $p = 3$

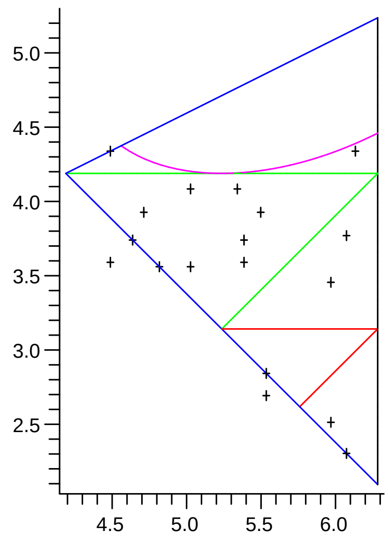
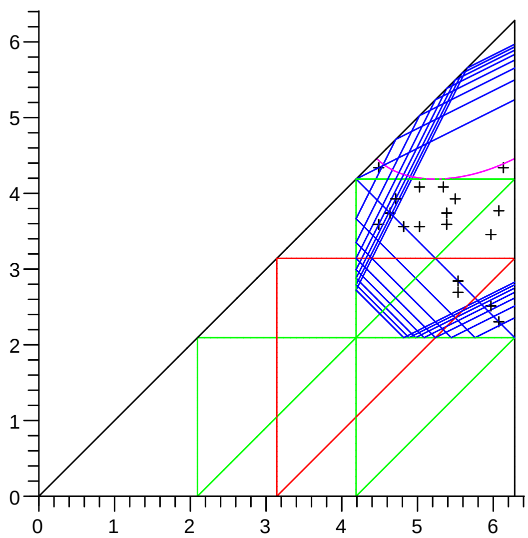


Figure 2: Groupes discrets et polygone de configurations pour $p = 2, 3, ...10$



3 Projets pour un futur proche

3.1 Groupes de réflexions

A part les groupes purement loxodromiques (obtenus par exemple par déformation de groupes fuchsiens), les seuls sous-groupes discrets connus de $Isom(H^n_{\mathbb{C}})$ sont de ce type. Rappelons qu'il existe dans $Isom(H^n_{\mathbb{C}})$ deux types de réflexions: les $\mathbb{C}$-réflexions qui sont des isométries holomorphes fixant une hypersurface complexe totalement géodésique (une copie de $H^{n-1}_{\mathbb{C}} \subset H^n_{\mathbb{C}}$), et les $\mathbb{R}$-réflexions qui sont des involutions antiholomorphes fixant un sous-espace lagrangien (une copie de $H^n_{\mathbb{R}} \subset H^n_{\mathbb{C}}$). Il y a beaucoup de questions ouvertes concernant les groupes de réflexions dans $Isom(H^n_{\mathbb{C}})$, parmi lesquelles on abordera les suivantes:

- **Groupes de réflexions finis:**

  Les groupes finis de réflexions complexes ont été classés par Shephard et Todd (voir aussi Broué–Malle–Rouquier). Dans [FPau] nous avons prouvé que tout sous-groupe fini de $U(2)$ est (d'indice 2 dans un groupe) engendré par des $\mathbb{R}$-réflexions. Est-ce vrai dans $U(n)$? Sans doute pas. La question est alors de classer les tels sous-groupes de $U(n)$.

- **Réseaux engendrés par des réflexions en dimension supérieure:**

  En géométrie hyperbolique réelle, il est connu que les réseaux engendrés par des réflexions n'existent qu'en petite dimension. Vinberg a prouvé qu'il n'existe pas de polyèdre de Coxeter compact dans $H^n_{\mathbb{R}}$ pour $n \geqslant 30$, et Prokhorov qu'il n'existe pas de polyèdre de Coxeter de volume fini dans $H^n_{\mathbb{R}}$ pour $n \geqslant 996$ (les exemples connus sont en dimension $n \leqslant 8$ pour le premier cas et $n \leqslant 21$ pour le second).

  La situation est-elle analogue dans $PU(n,1)$? Les exemples connus (Deligne–Mostow, Mostow, Allcock) sont en dimension $n \leqslant 13$ (et même $n \leqslant 9$ sauf un exemple d'Allcock). Un obstacle de taille est qu'il n'y a pas d'analogue des polyèdres de Coxeter.

- **Réseaux non arithmétiques engendrés par des réflexions:**

  Des exemples de réseaux non arithmétiques dans $PU(n,1)$ sont connus seulement pour $n = 2$ (14 réseaux dûs à Picard, Mostow, Deligne–Mostow) et $n = 3$ (un seul exemple, non compact, dû à Deligne–Mostow). Nous espérons trouver de nouveaux exemples dans les familles de groupes triangulaires de $\mathbb{C}$-réflexions décrites ci-dessus. On peut encore imaginer appliquer nos méthodes géométriques directes en dimension 3 et peut-être 4, mais au-delà ce n'est pas raisonnable.

3.2 Groupes discrets engendrés par des transformations elliptiques régulières

On pourra également explorer le cas général de groupes engendrés par deux transformations elliptiques quelconques, où l'espace des configurations est beaucoup plus gros. Cela semble a priori sans espoir de trouver des groupes discrets isolés dans ce gros espace de paramètres, mais les méthodes de la dernière partie de ma thèse permettent de déterminer de "bonnes "familles à un paramètre à examiner. Précisément, si les trois paires d'angles de A, B et AB sont fixées, il y a une famille à un paramètre de tels groupes engendrés par des $\mathbb{R}$-réflexions, et ceci permet de fouiller systématiquement de telles familles.

4 Questions liées

- Espaces de représentations de groupes de surface dans $PU(n,1)$ et groupes hyperboliques complexes quasi-fuchsiens. Variétés de caractères de variétés de dimension 3.

- Existence de structures CR-sphériques sur les variétés de dimension 3 (Schwartz, Falbel)
- Faux plans projectifs (Mumford, Klingler, Yeung, Prasad)
- Structures hyperboliques complexes sur des espaces de modules d'objets algébriques (Allcock–Carlson–Toledo)
- Variétés kähleriennes compactes de courbure négative non revêtues par la boule (Mostow–Siu, Deraux)
- Dynamique de l'action du mapping class group sur l'espace de représentations d'un groupe de surface dans $PU(n,1)$ (Goldman, Burger–Iozzi–Wienhard)
- Spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami automorphe sur les quotients arithmétiques de la boule (Francsics–Lax, Sarnak)

References

[CJ] J.H. Conway, A.J. Jones. *Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity).* Acta Arithmetica **30** (1976), 229–240.

[DM] P. Deligne, G. D. Mostow; *Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy.* Publ. Math. IHES **63** (1986), 5–89.

[DFP] M. Deraux, E. Falbel, J. Paupert; *New constructions of fundamental polyhedra in complex hyperbolic space.* Acta Math. **194** (2005), 155–201.

[FPau] E. Falbel, J. Paupert; *Fundamental domains for finite subgroups in $U(2)$ and configurations of Lagrangians.* Geom. Dedicata **109** (2004), 221–238.

[FZ] E. Falbel, V. Zocca; *A Poincaré's polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry.* J. Reine Angew. Math. **516** (1999), 138–158.

[Mos1] G. D. Mostow; *On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space.* Pacific J. Math. **86** (1980), 171–276.

[Mos2] G. D. Mostow; *Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions.* Publ. Math. IHES **63** (1986), 91–106.

[Par] J. R. Parker; *Unfaithful complex hyperbolic triangle groups.* Preprint (2005).

[ParPau] J. R. Parker, J. Paupert; *Unfaithful complex hyperbolic triangle groups II: Higher order reflections.* En préparation.

[Pau] J. Paupert; *Elliptic triangle groups in $PU(2,1)$, Lagrangian triples and momentum maps.* Preprint (2006). A paraître dans Topology.

[Sa] J.K. Sauter; *Isomorphisms among monodromy groups and applications to lattices in $PU(1,2)$.* Pacific J.Maths. **146** (1990), 331–384.

[Sz] R. E. Schwartz; *Complex hyperbolic triangle groups.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 339–349, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[Th] W. P. Thurston; *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere.* Geometry and Topology Monographs **1**, the Epstein Birthday Schrift (1998), 511–549.